TN4 CALCUL LITTERAL

Rappel : Une EXPRESSION LITTÉRALE est une expression dans laquelle figure une ou plusieurs lettres.

1) Développements et factorisations :

Les formules suivantes permettent de modifier l'écriture d'une expression littérale.
Elles sont vraies quelque soit la valeur choisie pour chacune des lettres utilisées.

Formes factorisées		Formes développées	
$k \times (a + b)$	=	$k \times a + k \times b$	
$k \times (a - b)$	=	$k \times a - k \times b$	distributivité
$(a + b) \times (c + d)$	=	$a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$	
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2 \times a \times b + b^2$	
$(a - b)^2$	=	$a^2 - 2 \times a \times b + b^2$	identités remarquables
$(a + b) \times (a - b)$	=	$a^2 - b^2$	

Exemples de développements :

$$(2x + 3)(5 - x) = 2x \times 5 - 2x \times x + 3 \times 5 - 3 \times x$$
$$= 10x - 2x^2 + 15 - 3x$$
$$= \boxed{-2x^2 + 7x + 15}$$

$$(7x - 3)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2$$
$$= \boxed{49x^2 - 42x + 9}$$

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2$$
$$= \boxed{x^2 + 8x + 16}$$

$$(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - 3^2$$
$$= \boxed{4x^2 - 9}$$

Exemples de factorisations :

$$8x^2 + 20x = 2x \times 4x + 2x \times 10 = \boxed{2x \times (4x + 10)}$$

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3 = \boxed{(2x + 3)^2}$$

$$16 - 25x^2 = 4^2 - (5x)^2 = \boxed{(4 - 5x) \times (4 + 5x)}$$

2) Egalité d'expressions :

Propriété : Deux expressions littérales sont égales lorsqu'elles donnent des résultats égaux, quelque soit la valeur choisie pour la ou les variables.

Pour démontrer que deux expressions littérales sont égales, il faut donc modifier leurs écritures sans remplacer les lettres par des nombres.

Exemple : Prouver que pour tout nombre n, $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$

Pour prouver cette propriété, on peut développer et réduire l'expression $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$:

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 - (n - 1)^2 &= n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 - [n^2 - 2 \times n \times 1 + 1^2] \\ &= n^2 + 2n + 1 - [n^2 - 2n + 1] \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\ &= 4n\end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues sont égales, donc l'égalité $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$ est vraie pour toutes les valeurs de n.

Remarque : pour démontrer que deux expressions littérales NE sont PAS égales, on peut utiliser un contre-exemple en remplaçant les lettres par des nombres.

Exemple : Benjamin affirme : « Pour tous nombres a et b, on a : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ »

Contre-exemple : avec $a = 2$ et $b = 3$ on a :

- $(a + b)^2 = (2 + 3)^2 = 5^2 = 25$
- $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

$25 \neq 13$ donc l'affirmation de benjamin est fausse.

3) Equations produit :

Propriété : Si un PRODUIT est NUL, alors l'un de ses facteurs est égal à zéro.

Exemple : résoudre l'équation $(2x - 3) \times (x + 2) = 0$

On a :	$2x - 3 = 0$	ou	$x + 2 = 0$
	$2x - 3 + 3 = 0 + 3$	ou	$x + 2 - 2 = 0 - 2$
	$2x = 3$	ou	$x = -2$
	$x = 3 \div 2 = 1,5$		

L'équation $(2x - 3) \times (x + 2) = 0$ admet deux solutions : $x = 1,5$ ou $x = -2$