TN2 - ARITHMETIQUE

1) Division euclidienne

Définition 1 (Les entiers naturels) : Un nombre entier naturel est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

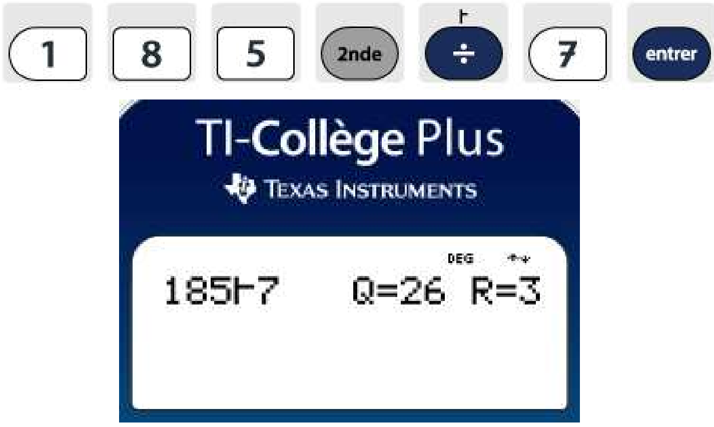
$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 \cdots\}$

Définition 2 (Division euclidienne) : Effectuer la division euclidienne d'un entier a (le dividende) par un entier b (le diviseur) non nul, c'est trouver deux entiers q (le quotient) et r (le reste) tels que :

$a = b \times q + r$ et $r < b$.

Exemple : division euclidienne de 185 par 7

1 8 5	7
- 1 4	
4 5	2 6
- 4 2	
3	



Soit $185 = 7 \times 26 + 3$ et $3 < 7$

2) Multiples et diviseurs

Définition 3 (Multiple et diviseur) :

• Un nombre entier a est un multiple d'un nombre entier b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

• On dit que b est un diviseur de a ou que a est divisible par b.

• Si l'entier b divise l'entier a, il existe donc un entier q tel que : $a = b \times q$.

Exemple : L'entier $a = 15$ est un multiple de $b = 3$ car $15 = 3 \times 5$. Les entiers 3 et 5 sont donc des diviseurs de 15.

Propriété 1 (Critères de divisibilité) :

• Un entier est divisible par 2 quand il est pair donc quand son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Par exemple 110 est divisible par 2.

• Un entier est divisible par 3 quand la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Par exemple 114 est divisible par 3 car $1 + 1 + 4 = 6$ et 6 est divisible par 3.

• Un entier est divisible par 5 quand son chiffre des unités est 0 ou 5. Par exemple 110 est divisible par 5.

• Un entier est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Par exemple 494 est divisible par 9 car $4 + 9 + 5 = 18$ et 18 est divisible par 9.

• Un entier est divisible par 10 quand son chiffre des unités est 0. Par exemple 110 est divisible par 10.

3) Nombres premiers

Définition 4 (Nombres premiers) :

Un nombre premier est un nombre qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même.

Exemples : Liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100.

$\underbrace{\mathbf{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}}_{\text{à connaître}}$, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

4) Décomposition en facteurs premiers

Propriété 2 (Admise) :

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Exemple :

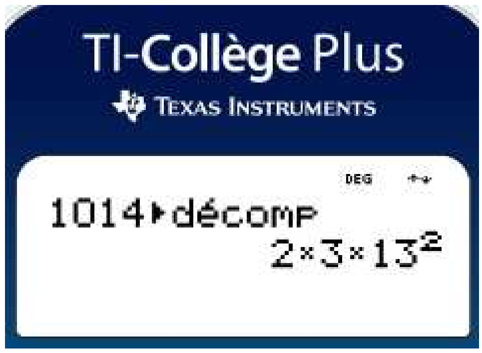
1 014 = 2 × 507

1 014 = 2 × (3 × 169)

1 014 = 2 × 3 × (13 × 13)

1 014 = 2 × 3 × 13^2

1 014	2
507	3
169	13
13	13
1	



5) Fractions irréductibles

Définition 5 (Fractions irréductibles) :

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple :

$$\frac{1014}{84} = \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{13^2}{2 \times 7} = \frac{169}{14}$$

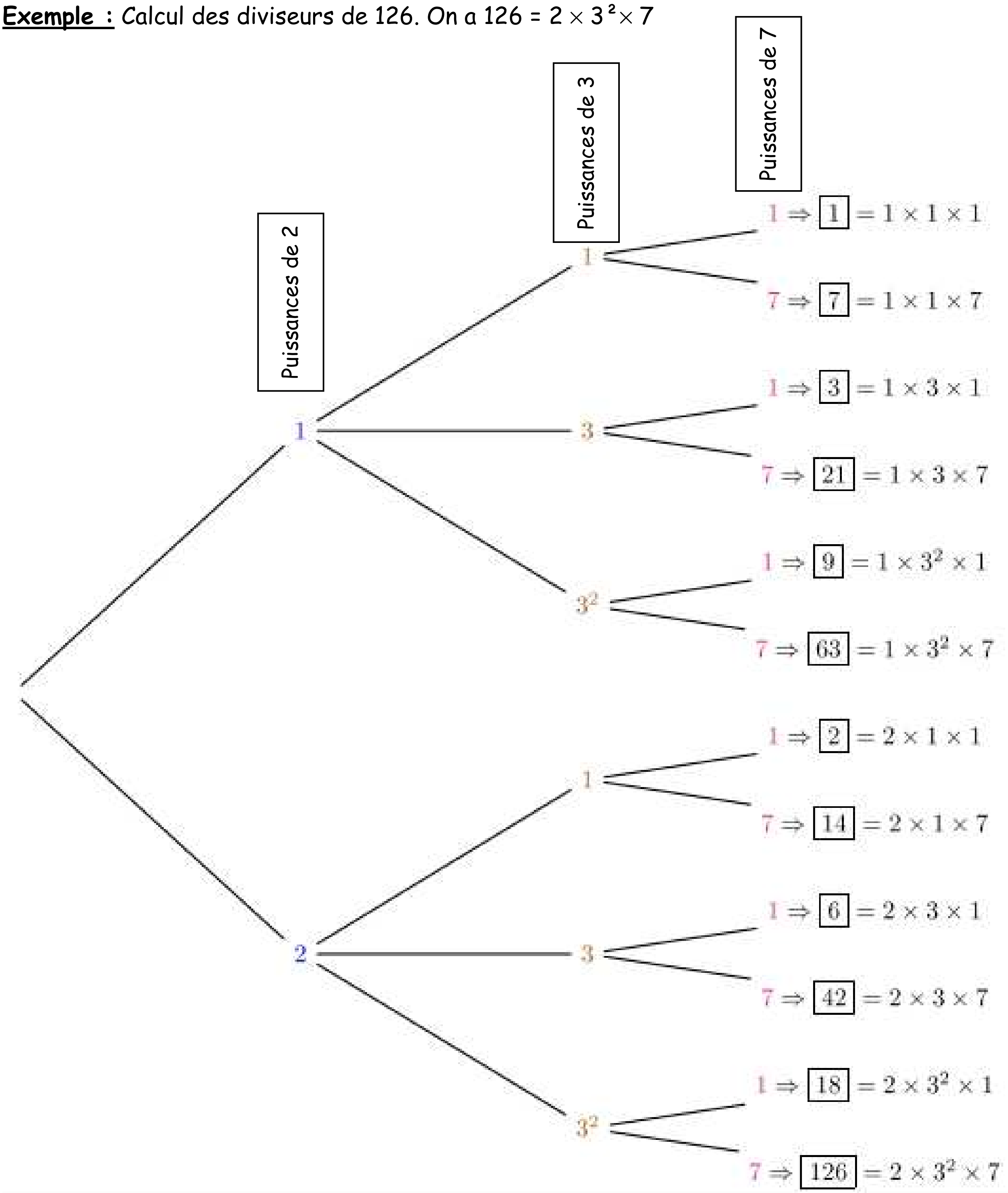
6) Applications de la décomposition : Objectifs 2nde GT

a) Lister tous les diviseurs d'un entier

Méthode 1

1. On écrit la décomposition de l'entier en facteurs premiers.
2. On complète un arbre présentant toutes les puissances des facteurs premiers.
3. On effectue le produit de chaque branche.

Exemple : Calcul des diviseurs de 126. On a $126 = 2 \times 3^2 \times 7$



Les diviseurs de 126 sont donc : 1, 7, 3, 21, 9, 63, 2, 14, 6, 42, 18 et 126

b) Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

Méthode 2 (PGCD)

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On recherche les facteurs communs des deux entiers .
3. On calcule alors ce facteur commun.

Pour résumer, le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b.

<u>**Exemple :**</u> Calcul du Plus Grand Commun Diviseur de 126 et 180.

$$\begin{cases} 180 & = 2 \times 2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 & = 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 & = \underbrace{(2 \times 3^2)}_{18} \times 2 \times 5 \\ 126 & = \underbrace{(2 \times 3^2)}_{18} \times 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 180 & = \boxed{18} \times 10 \\ 126 & = \boxed{18} \times 7 \end{cases}$$

Le Plus Grand Commun Diviseur des entiers 180 et 127 est donc 18.

Source : M. Duffaud